$m(m \geqslant 5)$正则简单图的性质

瞿晓鸿
(昆明理工大学 理学院,云南 昆明 650093)

摘要: 正则简单图具有许多优美的性质,故在许多领域特别是网络拓扑结构中有着广泛的应用.本文研究了 m $(m \geqslant 5)$正则简单图,并得到了这类图的一个重要性质.

关键词: 图论; 正则图; 子图; 邻接矩阵
中图分类号: O157.5　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1007-855X(2004)05-0144-05

Characteristics of M - Regular Simple Graph $(m \geqslant 5)$

QU Xiao-hong
(Faculty of Sciece, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, China)

Abstract: There are many good characteristics for regular simple graph, so the graphs are generally used in many fields, especially in web construction. M - regular Simple Graph $(m \geqslant 5)$ is studied and receives an important characteristics of this kind of graphs.

Key words: graph theory; regular graph; subgraph; adjacency matrix; morphism

0 引 言

一个图 G 是指一个有序三元组$(V(G), E(G), \Psi_G)$,其中 $V(G)$ 是非空的顶点集,$E(G)$ 是不与 $V(G)$ 相交的边集.称图 H 是图 G 的子图,如果 $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$.当 $H \subseteq G$,但 $H \neq G$ 时,则记为 $H \subset G$,称 H 为 G 的真子图.图的顶点 v 的度(或次)$d(v)$是指 G 中与 v 关联的边的数目.称图 G 是 m 正则的,如果对所有 $v \in V(G)$,有 $d(v) = m$;正则图是指对某个 m 而言的 m 正则图.如果 G 即没有环(端点为同一个顶点),也没有两条连杆连接同一对顶点,则称图 G 为正则简单图.设 $V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$,则 G 可用邻接矩阵表示:

$$A(G) = [a_{ij}]_{n \times n} = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \end{array}$$

其中 a_{ij} 是连接顶点 v_i 和 v_j 的边的数目,且 $A'(G) = A(G)$.

每给定一个图,可以唯一确定它的一个邻接矩阵;反之,给定一个邻接矩阵,也唯一地可以确定一个图.因此,图与其邻接矩阵之间有一一对应关系.于是,图的许多性质可以反映到邻接矩阵中来.

已知图 $G = (V(G), E(G), \Psi_G)$ 和 $H = (V(H), E(H), \Psi_H)$,如果存在两个一一映射 $\theta: V(G) \to V(H)$, $\Phi: E(G) \to E(H)$,使得 $\Psi_G(e) = uv$,当且仅当 $\Psi_H(\Phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$;这样一个映射对$(\theta, \Phi)$称为 G 和 H 之间的一个同构,记作 $G \cong H$.同构的图除了编号不同外,其实是同一图的不同画法.

命题 1[4]:两个图同构的充分而必要的条件是它们对应的邻接矩阵相似.

由于相似矩阵具有性质:反身性、对称性、传递性.故图的同构也具有这三个性质.我们已经知道,一个

收稿日期: 2003-09-28.
作者简介: 瞿晓鸿(1963.12~),女,副教授.主要研究方向: 图论、神经网络. E-mail: SunShine888888@mail.china.com.

图与其邻接矩阵之间有一一对应关系.在图的顶点的标记法不动的情况下,调整图的顶点,所得图与原图之间同构.而调整图的顶点,反映到邻接矩阵中相当于对调某两行,同时对调相同两列;反之,对某图 G 的邻接矩阵 $A(G)$ 作行对换及相同的列对换.反映到图 G 中,相当于在点的标记法不动的情况下,调整图的两个顶点.

1　偶数个顶点的 $2m(m \geqslant 3)$ 正则简单图的性质

定律 1　每个偶数个顶点的 $2m$ 正则简单图必包含 $(2m-1)$ 正则图 $(m \geqslant 3)$.

证明:设图 $G = (V(G), E(G), \Psi_G)$ 是 $2m(m \geqslant 3)$ 正则简单图,且 $V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, , n 为偶数. G 的邻接矩阵为

$$A(G) = [a_{ij}]_{n\times n} = \begin{array}{c|cccc} & v_1 & v & v_3 & \cdots v_n \\ \hline v_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ v_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ v_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}$$

其中 $A(G)$ 是偶数阶矩阵,满足条件

① $a_{ij} = a_{ji}$; ② $a_{ij} = 0$ 或者 1,且 $a_{ii} = 0$; ③ $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 2m, \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 2m$

$(i, j = 1, 2, \cdots, n \quad m \geqslant 3)$

可以证明, $\exists$ 一个可逆矩阵 P,使得 $B = P^{-1}AP$,其中 $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ 满足条件:

①′ $b_{ij} = b_{ji}$; ②′ $b_{ij} = 0$ 或者 1, $b_{ii} = 0, b_{i(n-i+1)} = 1$; ③′ $\sum_{i=1}^{n} b_{ij} = 2m, \sum_{j=1}^{n} b_{ij} = 2m$

$(i, j = 1, 2, \cdots, n \quad m \geqslant 3)$.事实上,将矩阵 A 表达成如下形式

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots\cdots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \cdots\cdots & a_{kn} \\ a_{k+1,1} & \cdots\cdots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & \cdots\cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{nk} & a_{n,k+1} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad k = n/2$$

令 h 是副对角线上从 a_{1n} 到 $a_{k,k+1}$ 中 0 的个数.

当 $h = 0$ 时,此时副对角线上的元素全为 1,结论成立.

当 $h = 1$ 时,设 $a_{i_1(n-i_1+1)} = 0$,则 $a_{(n-i_1+1)i_1} = 0$,分两种情况考虑:

1) 如果第 i_1 行中元素为"1"的 $2m$ 个元素中至少有一个元素所在的列,如第 j_1 列,有 1 个"1"元素与 $(n-i_1+1)$ 列中的 1 个"1"元素同在一行,此时,第 $n-i_1+1$ 列 $\leftrightarrow$ 第 j_1 列,同时,第 $(n-i_1+1)$ 行 $\leftrightarrow$ 第 j_1 行,其结果副对角线上所有元素全为 1;

2) 如果第 i_1 行中元素为"1"的 $2m$ 个元素中没有一个元素所在的列中的"1"元素与 $(n-i_1+1)$ 列中的"1"元素同行,则任选第 i_1 行中元素为"1"的 4 个元素中一个所在列与第 $(n-i_1+1)$ 列对换,同时作相同的行对换,其结果相当于 $a_{i_1(n-i_1+1)} = 1$,则 $a_{(n-i_1+1)i_1} = 1$.但副对角线上出现了另一个不为"1"的元素,记这个元素为 $a_{i_2(n-i_2+1)} = 0$,分两种情况考虑:

1) 如果第 i_2 行中元素为"1"的 $2m$ 个元素中至少有一个元素所在的列,如第 j_2 列,有 1 个"1"元素与

$(n-i_2+1)$ 列中的 1 个"1"元素同在一行,此时,第 $(n-i_2+1)$ 列 $\leftrightarrow$ 第 j_2 列,同时,第 $(n-i_2+1)$ 行 $\leftrightarrow$ 第 j_2 行,其结果副对角线上所有元素为 1;

(2) 如果第 i_2 行中元素为"1"的 $2m$ 个元素中没有一个元素所在的列中的"1"元素与 $(n-i_2+1)$ 列中的"1"元素同行,则任选第 i_2 行中元素为"1"的 $2m$ 个元素中一个所在的列与第 $(n-i_2+1)$ 列对换,同时作相同的行对换,其结果相当于,$a_{i_2(n-i_2+1)}=1, a_{(n-i_2+1)i_2}=1$.但副对角线上又出现另一个不为"1"的元素,记这个元素为 $a_{i_3(n-i_3+1)}=0$,又分两种情况进行考虑:

……………………………………………………………

由于这个矩阵中每行、每列中有 $2m$ 个元素为"1",故在至多 $(2m)^k$ 次上述类似过程之后,必出现一种情况,如 $a_{i_t(n-i_t+1)}=1(1\le t\le k)$,且 $a_{(n-i_t+1)i_t}=1$,在第 i_t 行中元素为"1"的 $2m$ 个元素中至少有一个元素所在的列,如第 j_t 列有 1 个"1"元素与 $(n-i_t+1)$ 列中的 1 个"1"元素同在一行,此时,第 $(n-i_t+1)$ 列 $\leftrightarrow j_t$ 列,同时,第 $(n-i_t+1)$ 行 $\leftrightarrow$ 第 j_t 行,其结果是副对角线上所有元素为 1.

设 $h=k-1$ 时 $(k=n/2)$,结论成立.

现证 $h=k(k=n/2)$ 时,由于第 1 行中有 $2m$ 个元素为"1",故任选 1 个"1"元素所在的列,如 j 列,作第 j 列 $\leftrightarrow$ 第 n 列,同时第 j 行 $\leftrightarrow$ 第 n 行,其结果 $a_{1n}=1$,且 $a_{n1}=1$,又由于 $l=k-1$ 时,结论成立,所以,副对角线上剩下的 $(k-1)$ 个"0"元素,通过行、列的同时对换,均可使副对角线上的元素全为 1.

综上所述,存在可逆矩阵 P^{-1},使得 $P^{-1}AP=B$,其中 $B(H)=[b_{ij}]_{n\times n}$ 满足条件:

①$'$ $b_{ij}=b_{ji}$; ②$'$ $b_{ij}=0$ 或者 1, $b_{ii}=0, b_{i(n-i+1)}=1$; ③$'$ $\sum\limits_{i=1}^{n} b_{ij}=2m, \sum\limits_{j=1}^{n}=b_{ij}=2m$

$(i,j=1,2,\cdots,n \quad m\geqslant 3)$

因为 $A(G)$ 与 $B(H)$ 相似,从而图 G 与图 H 同构,同构图除了编号不同外,其实是同一图的不同画法.因此,图 G 与图 H 有具有完全相同的性质,如果图 H 中包含 $(2m-1)$ 正则图,则 G 中也包含 $(2m-1)$ 正则图;反之亦然.

现在将 $B(H)$ 中对角线上的元素"1"全部换成"0"元素,得矩阵 $B'=[b_{ij}]_{n\times n}$ 满足条件:

①$''$ $b_{ij}'=b_{ji}'$; ②$''$ $b_{ij}'=0$ 或者 1,且 $b_{ii}'=0, b'_{I(n-i+1)}=0$; ③$''$ $\sum\limits_{i=1}^{n} b_{ij}=2m-1, \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij}=2m-1$

$(i,j=1,2,\cdots,n \quad m\geqslant 3)$

而 B' 对应一个 $(2m-1)$ 正则图 H',H' 是 H 的一个真子图,当然 G 中也包含一个 $(2m-1)$ 正则图 G',使得 H' 与 G' 同构.

所以,每个偶数个顶点的 $2m$ 正则简单图必包含 $(2m-1)$ 正则图 $(m\geqslant 3)$.

2 奇数个顶点的 $2m(m\geqslant 3)$ 正则简单图的性质

定律 2 每个奇数个顶点的 $2m(m\geqslant 3)$ 正则简单图都包含 $(2m-1)$ 正则图.

证明:设图 $G=(V(G),E(G),\Psi_G)$ 是 $2m(m\geqslant 3)$ 正则简单图,且 $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$,,$n$ 为奇数.G 的邻接矩阵为

$$A(G)=[a_{ij}]_{n\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots\cdots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \cdots\cdots & a_{kn} \\ a_{k+1,1} & \cdots\cdots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & \cdots\cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{nk} & a_{n,k+1} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad k=(n-1)/2$$

其中 $A(G)$ 是奇数阶矩阵,满足条件

① $a_{ij} = a_{ji}$; ② $a_{ij} = 0$ 或者 1,且 $a_{ii} = 0$; ③ $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 2m, \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 2m$

$(i,j = 1,2,\cdots,n \quad m \geqslant 3)$

由定律1中的证明方法,类似地可以证明,∃ 一个可逆矩阵 Q,使得 $C = Q^{-1}AQ$,其中 $C = [c_{ij}]_{n\times n}$ 满足条件:

①′ $c_{ij} = c_{ji}$; ②′ $c_{ij} = 0$ 或者 1,且 $c_{ii} = 0, c_{i(n-i+1)} = 1$; ③′ $\sum_{i=1}^{n} c_{ij} = 2m, \sum_{j=1}^{n} c_{ij} = 2m$

$(i,j = 1,2,\cdots,n \quad m \geqslant 3)$

又令第 i 列 ↔ 第 $i+1$ 列,第 I 行 ↔ 第 $i+1$ 行,$(i = k, k+1, \cdots, n-1, k = (n-1)/2)$.

其结果使得副对线的上一行的元素全为1,即存在可逆矩阵 S,使得 $S^{-1}CS = B$,其中 $B(H) = [b_{ij}]_{n\times n}$ 满足条件:

①″ $b_{ij} = b_{ji}$; ②″ $b_{ij} = 0$ 或者 1,且 $b_{ii} = 0, b_{I(n-I)} = 1$; ③″ $\sum_{i=1}^{n} b_{ij} = 2m-1, \sum_{j=1}^{n} b_{ij} = 2m-1$

$(i,j = 1,2,\cdots,n \quad m \geqslant 3)$

$B = S^{-1}CS = S^{-1}Q^{-1}AQS = (QS)^{-1}A(QS)$,令 $QS = P$,则

$$B = P^{-1}AP.$$

令以 B 为邻接矩阵的图为 H.因 $A(G)$ 与 $B(H)$ 相似,从而图 G 与图 H 同构,同构图实质上是画法相同,而标记法不同而已.因此,如果图 H 中包含 $(2m-1)$ 正则图,则 G 中也包含 $(2m-1)$ 正则图;反之亦然.现证图 H 中包含 $(2m-1)$ 正则图.

将 $B(H)$ 中最后一行、最后一列划去,并把最后一行中的"0"元素所在的列对着的副对角线的上一行中的"1"元素换成"0"元素.这样得到的矩阵记为

$B'(H') = [b'_{ij}]_{(n-1)\times(n-1)}$ 满足以下条件:

①″ $b'_{ij} = b'_{ji}$; ②″ $b_{ij}' = 0$ 或者 1,且 $b'_{ii} = 0$; ③″ $\sum_{i=1}^{n-1} b'_{ij} = 2m-1, \sum_{j=1}^{n-1} b'_{ij} = 2m-1$

$(i,j = 1,2,\cdots,n-1 \quad m \geqslant 3)$

而 $B'(H')$ 对应一个 $(2m-1)$ 正则图 H',H' 是 H 的一个 $(2m-1)$ 正则图,从而 G 中也包一个 $(2m-1)$ 正则图 G',使得 G' 与 H' 同构.

因为,每个奇数个顶点的 $2m(m \geqslant 3)$ 正则简单图都包含 $(2m-1)$ 正则图.

命题2:每个4正则简单图都包含3正则图.

由命题[2]可得结论:

定律3　每个 $2m$ 正则简单图都包含 $(2m-1)$ 正则图 $(m \geqslant 2)$.

3　$(2m-1)(m \geqslant 2)$ 正则简单图的性质

定律4　每个 $(2m-1)(m \geqslant 2)$ 正则简单图都包含 $(2m-2)$ 正则图.

证明:设图 $G = (V(G), E(G), \Psi_G)$ 是 $(2m-1)(m \geqslant 2)$ 正则简单图,且 $V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$,$n$ 必为偶数[2].G 的邻接矩阵为

$$A(G)=[a_{ij}]_{n\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots\cdots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \cdots\cdots & a_{kn} \\ a_{k+1,1} & \cdots\cdots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & \cdots\cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{nk} & a_{n,k+1} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad k=n/2$$

其中 $A(G)$ 满足条件:

① $a_{ij}=a_{ji}$; ② $a_{ij}=0$ 或者 1,且 $a_{ii}=0$; ③ $\sum_{i=1}^{n}a_{ij}=2m-1,\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=2m-1$

$(i,j=1,2,\cdots,n \quad m\geqslant 2)$

由定律 1 中的证明方法,类似地可以证明,∃ 一个可逆矩阵 P,使得 $B=P^{-1}AP$,其中 $B=B(H)=[b_{ij}]_{n\times n}$ 满足条件:

①′ $b_{ij}=b_{ji}$; ②′ $b_{ij}=0$ 或者 1,且 $b_{ii}=0,b_{i(n-i+1)}=1$; ③′ $\sum_{i=1}^{n}b_{ij}=2m-1,\sum_{j=1}^{n}b_{ij}=2m-1$

$(i,j=1,2,\cdots,n \quad m\geqslant 2)$

现在将 $B(H)$ 中对角线上的元素“1”全部换成“0”元素,得矩阵 $B'=[b_{ij}]_{n\times n}$ 满足条件:

①″ $b_{ij}'=b_{ji}'$; ②″ $b_{ij}'=0$ 或者 1,且 $b_{ii}'=0,b'_{I(n-i+1)}=0$; ③″ $\sum_{i=1}^{n}b_{ij}=2m-2,\sum_{j=1}^{n}b_{ij}=2m-2$

$(i,j=1,2,\cdots,n \quad m\geqslant 3)$

而 B' 对应一个 $(2m-2)$ 正则图 H',H' 是 H 的一个真子图,当然 G 中也包含一个 $(2m-2)$ 正则图 G',使得 H' 与 G' 同构.

所以每个 $(2m-1)(m\geqslant 2)$ 正则简单图都包含 $(2m-2)$ 正则图.

于是,我们由定律 3,定律 4 可以得到关于正则简单图的一个重要性质.

定律 5 每个 $m(m\geqslant 3)$ 正则简单图必包含 l 正则图,其中 $2\leqslant l\leqslant m-1$.

4 结 语

本文对正则简单图进行了深入研究,彻底解决了 $m(m\geqslant 3)$ 正则简单图中所包含的正则子图的问题.

参考文献:

[1] J.A.邦迪,U.S.R.默蒂.图论及其应用[M].北京:科学出版社,1987.261.
[2] 瞿晓鸿.4 正则图简单图的一个性质.昆明理工大学学报(理工版),2004,29(3):136.
[3] 高振滨,张晓威.有关 4 正则简单图的性质的讨论[J].哈尔滨工程大学学报,2001,2.
[4] 吴文泷.图基础及其应用[M].北京:,中国铁道出版社,1984.77~80.